

26-03-2020

★ Etude analytique de l'espace ★

Leçon n°: 12

2^{ème} B.P.M.V.A

① Repérage dans l'espace (المَقَامَة فِي الْفَضَاءِ) Coordonnées: (الاحداثيات)

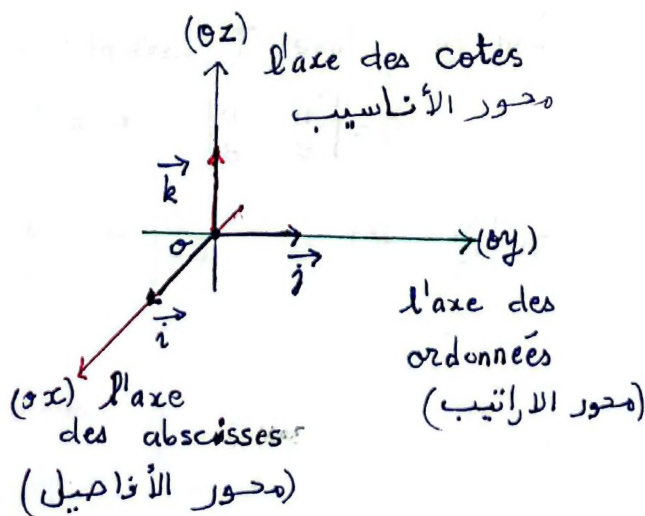
Déf: On appelle repère de l'espace tout quadruplet: $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec:

- O un point de l'espace.
- \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires (pas dans le même plan) (غير مستوائية)

et on a:

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthogonal \Leftrightarrow $\begin{cases} \text{les droites} \\ (Ox), (Oy) \text{ et} \\ (Oz) \text{ sont} \\ \text{perpendiculaires} \end{cases}$
(متعامد)

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal \Leftrightarrow $\begin{cases} (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \\ \text{orthogonal} \\ \text{et:} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$
(متعامد ومنظم)



①

Thm: a) Soit M un point de l'espace.

$$\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

et on écrit $M(x, y, z)$.

Le triplet (x, y, z) est appelé: **Coordonnées** de M .

b) Soit \vec{u} un vecteur de l'espace.

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Le triplet (a, b, c) est appelé:

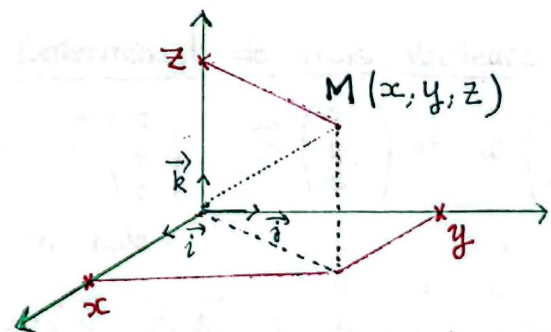
Coordonnées de \vec{u} et on note:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

★ Exemple: le point $A(1, -1, 0)$

s'écrit autrement: $\vec{OA} = \vec{i} - \vec{j}$

$$\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



on écrit $M(\text{abscisse}; \text{ordonnée}; \text{cote})$

② Calcul sur les coordonnées.

a) Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$

alors: $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

b) Soit I le milieu du segment $[a, b]$.

on a: $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

c) si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

alors:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix} \text{ et pour tout}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ on a: } \alpha \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a \\ \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c \end{pmatrix}$$

EX.1/ A(3, 1, 5) ; B(2, 4, 0) et I est le milieu de [AB].

Déterminer les coordonnées de :
I, \vec{AB} , \vec{BA} et $\frac{1}{2} \vec{AB}$

③ Colinéarité de deux vecteurs. (استقامية متجهتين)

Déf: \vec{u}, \vec{v} colinéaire \Leftrightarrow
($\exists k \in \mathbb{R}$) ; $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

Prop: si $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ on

note T le tableau: $\begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{bmatrix}$
et on a:

\vec{u} et \vec{v} colinéaire (مستقيمتان)

ssi les sous déterminants extraits du tableau T sont tous nuls

$$\text{C-à-d: } \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$$

Rappel: $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = (x)(y') - (y)(x')$

* Exemple: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\text{on a: } T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

on calcule les sous déterminants extraits
(المَحْدَدَات المُسْتَخْرَجَة)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-6)(-1) = 6 - 6 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-6)(4) - (2)(3) = -24 - 6 = -30$$

$$-30 \neq 0$$

donc \vec{u} et \vec{v} ne sont pas
colinéaires

⚠! On dit qu'ils sont :
linéairement indépendant.

* **Résultat .1** trois point A, B et C sont colinéaires ssi :
 \vec{AB}, \vec{AC} colinéaires.

④ Déterminant de trois vecteurs.

$$\text{si } \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ; \vec{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$$

on note:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= + a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

* Exemple: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 12) + 2(0 - 12) + 2(6 - 0) = -12 - 24 + 12$$

$$= -24$$

②

⑤ Coplanarité de trois vecteurs (استوائية ثلاث متجهات)

Prop: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires (dans le même plan) ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Exemple: $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
montrons que \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

$$\text{On a: } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (0-1) - (0-1) + 0 = -1 + 1 = 0$$

donc \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires
(توجد في نفس المستوى)

*** Résultat . 2:** Soient A, B, C et D
4 points de l'espace.

A, B, C et D sont coplanaires

ssi \vec{AB}, \vec{AC} et \vec{BC} sont coplanaires.

⑥ Orthogonalité de deux vecteurs: (تعامد متجهتين)

Le produit scalaire de $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
et de $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ est le nombre réel
noté est défini par:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'$$

et on a:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

*** Exemple:** $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

a-t-on $\vec{u} \perp \vec{v}$?

③

Réponse: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \times -2) + (-2 \times -1) + (0 \times 5)$
 $= -2 + 2 + 0 = 0$

donc \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

⑦ Représentation paramétrique d'une droite

Une droite (D) dans l'espace est déterminée par :

- un point $A(x_A, y_A, z_A) \in (D)$
- un vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
(متجه اتجاه)

et on note : $D(A, \vec{u})$.

Déf

On appelle représentation paramétrique
de (D) le système :

$$(D) \begin{cases} x = x_A + a \cdot t \\ y = y_A + b \cdot t \\ z = z_A + c \cdot t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

où t est le paramètre.

*** Exemple:** $(\Delta) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = -5 + 7t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

est la représentation paramétrique de
la droite passant par le point:

$A(1, 3, -5)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

EX. 21 Donner une représentation
paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$
dans chaque cas :

1°/ $A(-1, 2, 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2°/ $A(0, 1, 0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3°/ $A(0, 0, 0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Ex.3 On considère la droite :

$$(D) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1° Donner deux points A et B appartenant à (D).

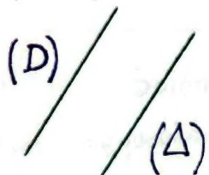
2° Donner un vecteur directeur de (D).

3° Soit $E(2, -1, 0)$. Est-ce que $E \in (D)$?

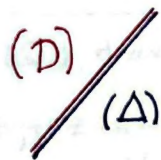
③ Position relative de deux droites.

Il y a 4 cas possibles :

I. (D) et (Δ) coplanaires (et parallèles) (مُسْتَوَائِيَانِ)

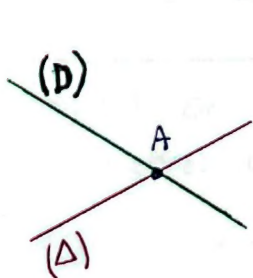


$(D) \parallel (\Delta)$
(strictement) parallèle
مُتَوَازِيَانِ (قَطْعَا)

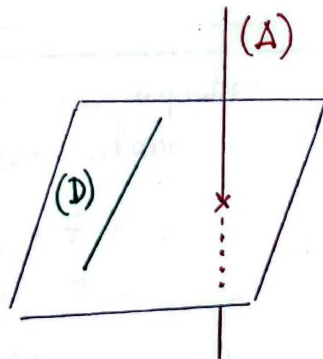


$(D) = (\Delta)$ ils sont confondues
مُنْتَظِفَتَانِ

II. (D) et (Δ) non parallèles :



(D) et (Δ) sont :
sécantes (مُتَقَاتِعَتَانِ)
et coplanaires



$$(D) \parallel (\Delta) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ colinéaires.}$$

$$(D) \perp (\Delta) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

④

Req: ① si $(D) \cap (\Delta) = \emptyset$ alors :

(D) et (Δ) sont strictement parallèles ou confondues (voir les exercices)

② si (D) et (Δ) ne sont pas parallèles alors :

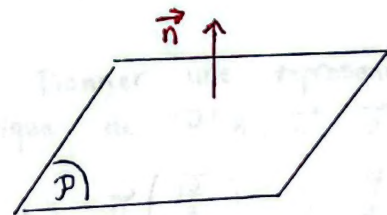
(D) et (Δ) sont sécantes ou non coplanaires.

④ Equation cartésienne d'un plan :

Soient (P) un plan dans l'espace et \vec{n} un vecteur non nul.

Déf: \vec{n} est normal (مُنْتَظِمِيَّة) à (P)

$$\text{si : } \vec{n} \perp (P)$$



Prop: (P) un plan passant par A
 \vec{n} un vecteur normal à (P).

$$\text{on a : } M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

* Exemple: Soit (P) un plan passant par $A(1, -2, 5)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à (P). Trouver une équation de (P).

Réponse: Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\text{on a } M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{avec : } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-5 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-5 \end{pmatrix}$$

$$\text{puis : } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1) + 0(y+2) + 4(z-5) = 0$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow 3x + 4y - 3 - 2z = 0$$

finalment: $(P): 3x + 4y - 2z = 0$

Thm et déf: Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tout plan (P) admet une équation cartésienne:
 $ax + by + cz + d = 0$
 de plus $\vec{n}(a, b, c)$ est normal à (P) .

Exemple: $(Q): x + 10y - 7 = 0$
 (Q) est un plan et $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ est normal à (Q) .

Prop: Soient (P) et (Q) deux plans d'équations: $(P): ax + by + cz + d = 0$
 $(Q): a'x + b'y + c'z + d' = 0$
 On a: $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ est normal à (P)
 $\vec{n}'\left(\begin{smallmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{smallmatrix}\right)$ est normal à (Q) .

$$(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \vec{n}, \vec{n}' \text{ colinéaires}$$

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$$

EX.4 On donne les équations cartésiennes de deux plans:

$$(P): x - 4y + 7 = 0$$

$$(Q): x + 2y - z + 1 = 0$$

1°/ Montrer que (P) et (Q) sont sécantes

2°/ Déterminer un vecteur directeur de la droite d'intersection (D) des plans (P) et (Q) .

(5)

⑩ Représentation paramétrique d'un plan dans l'espace:

Un plan (P) est déterminé par:

♦ un point $A(x_A, y_A, z_A) \in (P)$.

♦ Deux vecteurs directeurs:

$$\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \text{ et } \vec{v}\left(\begin{smallmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{smallmatrix}\right) \text{ et on note: } P(A, \vec{u}, \vec{v})$$

Déf On appelle représentation paramétrique du plan (P) le système:

$$(P) \begin{cases} x = x_A + at + at' \\ y = y_A + bt + bt' \\ z = z_A + ct + ct' \end{cases} \text{ avec: } (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

t, t' sont des paramètres.

Exemple Donner une représentation paramétrique de $P(A; \vec{u}; \vec{v})$ avec:

$$A(1; 0; 0); \vec{u}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \vec{v}\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Réponse:

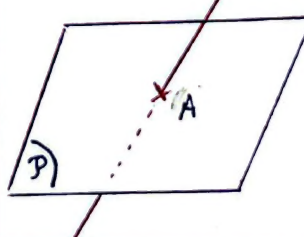
$$(P): \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t + 7t' \\ y = -3t + 2t' \\ z = 3t' \end{cases} (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

⑪ Les positions relatives de droites et de plans.

Il y a 3 cas possibles:

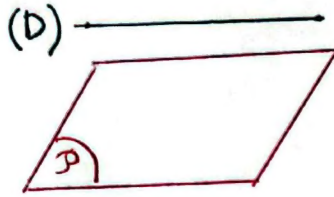
1^{er} cas: (D) et (P) sont sécantes

en A :



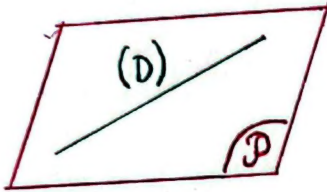
$$(D) \cap (P) = \{A\}$$

2^{em} cas : (D) et (P) sont parallèles
et (D) n'est pas incluse dans (P):



$$\begin{cases} (D) \parallel (P) \\ (D) \not\subset (P) \end{cases}$$

3^o cas : (D) est incluse dans (P)



$$(D) \subset (P)$$

EX.5 Déterminer l'intersection de:
(D) et (P) où:

$$(P): 3x - y + z - 1 = 0$$

$$\text{et } (D): \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -2 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

* Série d'exercices *

ex.1 : [BAC.Pro - 2018] (2pt)

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient (D_1) la droite passant par le point $A(1, 2, -1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(-1, 0, 1)$ et (D_2) la droite dont une représentation paramétrique est:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. Montrer que le point $A(1, 2, -1)$ appartient à (D_2) .

2. Donner une équation cartésienne du plan défini par (D_1) et (D_2) .

* * * * *

EX.2 : [BAC.Pro. Session de rattrapage. 2018]

L'espace est rapporté à un repère (3pts)

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points

$A(1, 1, 0)$; $B(0, -1, 0)$ et $C(-1, 0, 1)$

1-a) Vérifier que: $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$

$$\text{et } \vec{BC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

1-b) Montrer que les vecteurs \vec{OA} et \vec{BC} sont linéairement indépendants.

2-a) Vérifier que: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (BC).

et qu'une représentation paramétrique de la droite (OA) est: $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

2.b) Montrer que les droites (OA) et (BC) ne sont pas coplanaires

2.c) En déduire sans calcul que B est le seul point d'intersection du plan (OAB) et la droite (BC)

* * * *

ex.3: Considérons le point $A(4, -1, 2)$ et le plan: $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$

1°/ Vérifier que: $A \notin (P)$

2°/ Donner deux points $B \in (P)$ et $C \in (P)$.

3°/ Donner deux vecteurs directeurs de (P) puis une représentation paramétrique du plan (P)

4°/ Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) puis celle de (AC).

* Bon courage !!